چرا مقاومت کم نمی‌شود؟

ا.، وی. لیاشکو

این مقاله یک مقاله‌ی ریاضی است، گرچه به موضوعی کاملاً فیزیکی می‌پردازد. با وجود این، از آنجایی که وارد بررسی پدیده‌های بنیادی فیزیک نخواهیم شد، خواننده برای فهمیدن مقاله به داشتن معلومات فیزیکی احتیاجی ندارد. در اینجا همانند دیگر کاربردهای ریاضی، یک مدل ریاضی برای بررسی مسأله‌ای خاص، به همراه ابزارهای مناسب ریاضی برای حل آن، ارائه خواهیم کرد. این کار علاوه بر یافتن جواب مسأله‌ی مورد نظر، به ارائه‌ی راه‌حل‌هایی برای مسائل دیگری در فیزیک، اقتصاد و هندسه می‌انجامد.

یک مدار الکتریکی متشکل از تعدادی مقاومت در نظر بگیرید و مقاومت کل R، بین دو نقطه‌ی A و B را اندازه‌گیری کنید. حال فرض کنید که یکی از مقاومت‌های مدار دچار سوختگی شود و مقاومت آن افزایش یابد.[1] دوباره مقاومت R بین A و B را اندازه‌گیری کنید. سؤالی که اینجا مطرح می‌شود این است که کدام یک از حالت‌های زیر محتمل است؟

۱. مقاومت R زیاد شده است.

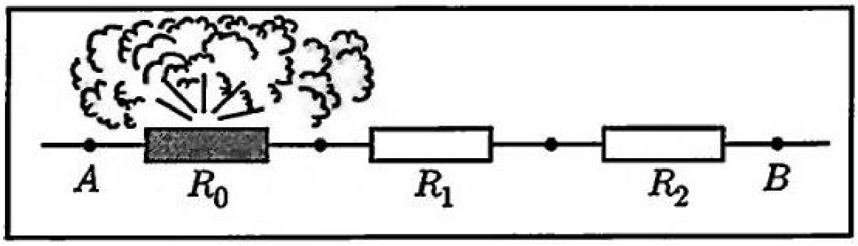
۲. R تغییری نمی‌کند.

۳. R کم می‌شود.

هر یک از این حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱. به وضوح مقاومت کل ممکن است افزایش یابد، مثلا اگر مداری شامل یک یا چند مقاومت که به صورت سری به هم وصل شده‌اند داشته باشیم، مقاومت کل مدار جمع تک‌تک مقاومت‌هاست. در نتیجه اگر یکی از مقاومت‌ها زیاد شود، جمع نیز زیاد خواهد شد. (شکل ۱)

[1] ما حالتی را که مقاومت کاملاً از بین برود (یعنی جریان از آن رد نشود) حذف نکرده‌ایم، چون در این حالت مقاومت آن را می‌توان بی‌نهایت در نظر گرفت.



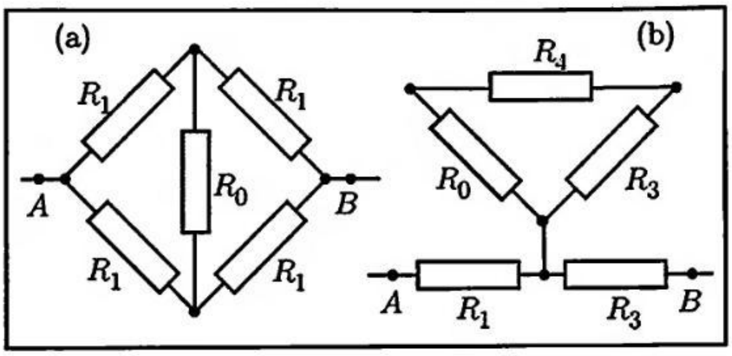
شکل ۱

۲. شما می‌توانید بعد از کمی تأمل، مثالی بزنید که مقاومت کل تغییر نکند. دو مثال از این نوع مدارها در شکل ۲ نشان داده شده است. در هر دو مدار افزایش مقاومت R_0، مقاومت کل را تغییر نمی‌دهد.

۳. همه‌ی تلاش‌ها برای ارائه‌ی مثالی که کاهش مقاومت کل را نشان دهد، به شکست منجر می‌شود. آیا واقعا چنین مثالی ممکن است؟ جوابی که یک فرد هوشمند به این سؤال می‌دهد، "مسلماً نه!" است. تمامی مشاهدات این مسأله را تأیید می‌کند، اما دلیل آن را هیچ کس نمی‌تواند توضیح دهد. این اصلاً عجیب نیست، چون اثبات دقیق گزاره‌ی زیر به هیچ وجه ساده نیست.

گزاره. اگر یکی از مقاومت‌های مداری الکتریکی زیاد شود، مقاومت کل مدار کم نمی‌شود.

اثبات این گزاره (آنچنان که در آخر این مقاله خواهد آمد) بر پایه‌ی یک اصل اساسی به نام اصل کمینگی یا اصل کمترین کنش است. (معمولا در فیزیک از واژه‌ی دوم برای این اصل استفاده می‌کنند.)



شکل ۲

این اصل را می‌توان این‌گونه بیان کرد: بسیاری از فرایندهای فیزیکی به گونه‌ای اتفاق می‌افتند که یک کمیت خاص مقدار کمینه‌ی خود را بگیرد. مثلاً حباب صابونی که در یک قاب سیمی با یک ضلع متحرک تشکیل می‌شود، شکل با کمترین مساحت را به خود می‌گیرد؛ یا یک شعاع نور گذرنده از محیطی با ضریب شکست متغیر، مسیری را انتخاب می‌کند که کوچکترین زمان عبور را دارد (اصل فرما). قطره‌ی بارانی که در سرازیری یک کوه محدب پایین می‌آید، مسیری را بین دو ارتفاع انتخاب می‌کند که متناظر با بیشترین شیب است و . . . .

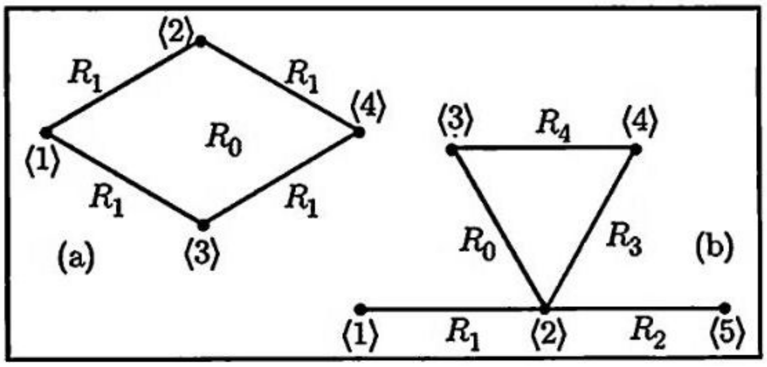
بنابراین برای حل یک مسأله‌ی فیزیکی خاص (مانند مثال‌هایی که ذکر شد) باید مینیمم یک تابع مرتبط با مسأله را پیدا کنیم. این کار کاملاً متعلق به قلمرو ریاضی است: ابتدا باید بیانی ریاضی از اصل کمینگی پیدا کنیم و سپس روش‌های ریاضی لازم را برای به کاربردن آن به دست آوریم.

مسلماً خواننده‌ی این مقاله بیش از آن که به اثبات اصل کمینگی علاقمند باشد، به دنبال روش‌های به‌کارگیری آن است. با این حال، ممکن است این سوال پیش بیاید که چگونه می‌توان برای یک حقیقت فیزیکی که در ظاهر ارتباطی با ریاضی ندارد، یک اثبات دقیق ریاضی ارائه کرد؟ پس ما قبل از این که به صورت جدی وارد حل مسأله‌ی اصلی بشویم، کمی در مورد ایده‌های اصلی این کار توضیح می‌دهیم.

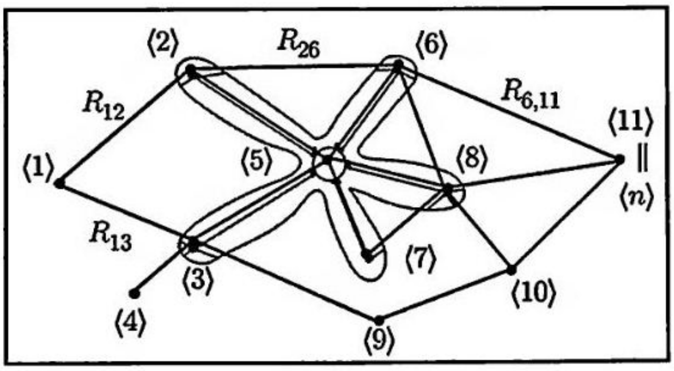
اولین کاری که یک ریاضیدان برای حل یک مسأله‌ی کاربردی انجام می‌دهد، ساختن یک مدل ریاضی است. برای این کار لازم است که در ابتدا مفاهیم اصلی لازم برای فرمول‌بندی مسأله را پیدا کرد و همه‌ی جزئیات غیرلازم برای مطالعه‌ی پدیده‌ی مورد نظر را کنار گذاشت. به این طریق به یک بیان صوری (مجرد) از مسأله می‌رسیم که در آن اشیاء حقیقی و پدیده‌ها با اشیاء ریاضی مجرد (مثل نقاط، خطوط، اعداد و توابع) و قوانین حاکم بر پدیده‌ها با معادلات ریاضی جایگزین می‌شوند. به این صورت مدار الکتریکی به "گراف وزن‌دار"، مقاومت‌ها به اعداد و قانون اهم و کرشهف به یک دستگاه اساسی از معادلات تبدیل می‌شوند. به وضوح باید جزئیات بی‌اهمیتی مانند رنگ روکش سیم‌ها، جنس فلزات سازنده‌ی سیم‌ها و مقاومت‌ها و حتی اینکه جریان الکتریکی همان شارش الکترون‌هاست را کنار بگذاریم. هیچ کدام از این جزئیات برای ما اهمیت ندارد. با این توضیحات می‌توانیم مدل ریاضی مسأله‌ی خودمان را با جزئیات کامل بسازیم.

گراف وزن‌دار (مدار الکتریکی)

ما به هر مدار الکتریکی یک گراف وزن‌دار نسبت می‌دهیم که از تعدادی متناهی نقطه در صفحه یا فضا موسوم به رأس‌های گراف و تعدادی پاره‌خط واصل رئوس، موسوم به یال‌ها تشکیل شده است و به هر یال عددی به نام وزن نسبت داده می‌شود. مثلاً به مدارهای شکل۲، گراف‌های شکل ۳ را متناظر می‌کنیم. در شکل ۴ هم یک گراف وزن‌دار پیچیده‌تر نشان داده شده است.



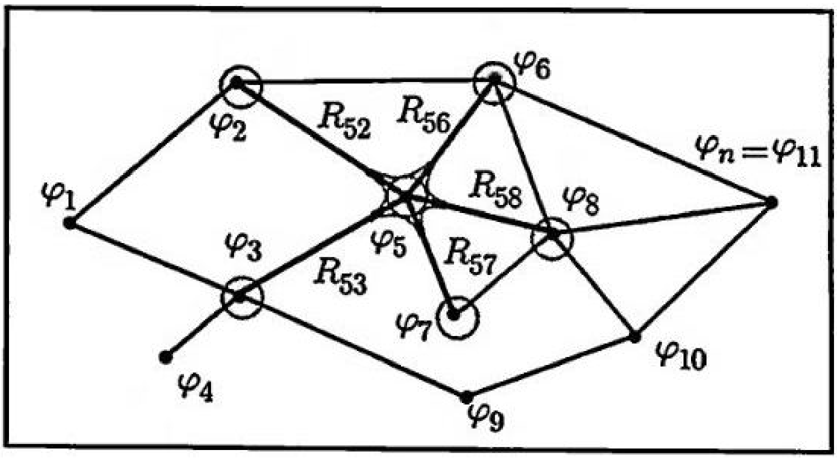
شکل ۳



شکل ۴

رئوس گراف‌هایی که به این صورت به دست می‌آیند را با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و رأس شماره‌ی i را با $\langle i\rangle$ نمایش می‌دهیم. در اینجا فقط گراف‌هایی را در نظر می‌گیریم که بین هیچ دو رأسی بیشتر از یک یال موجود نباشد. یال واصل رأس $\langle i\rangle$ به رأس $\langle j\rangle$ را با $\langle i,j\rangle$ نمایش می‌دهیم، به $\langle i\rangle$ سر یال و به $\langle j\rangle$ ته یال می‌گوییم. (مثلاً گراف شکل ۴ یال $\langle ۲,۳\rangle$ ندارد.) وزن یال $\langle i,j\rangle$ را با R_{ij} نشان می‌دهیم و با وجود اینکه در مدل ریاضی ما R_{ij} صرفا یک عدد است، به جهت تعبیر فیزیکی آن در مسأله، به آن مقاومت می‌گوییم.

بالأخره، منظور از ستاره‌ی رأس $\langle i\rangle$، همگی رئوس گراف هستند که با یال به رأس $\langle i\rangle$ متصلند و برای آن از نماد S_i استفاده می‌کنیم. ستاره‌ی رأس $\langle ۵\rangle$ را در شکل ۴ مشخص کرده‌ایم.



شکل ۵

پتانسیل هارمونیک

فرض کنیم گراف Γ با رئوس $\langle ۱\rangle, \langle ۲\rangle, \ldots, \langle n\rangle$ و یال‌های $\langle i, j\rangle$ با وزن R_{ij} داده شده است. می‌خواهیم یک ولتاژ (اختلاف پتانسیل) را به Γ که نماینده‌ی یک مدار الکتریکی در مدل ماست، اعمال کنیم. به بیان دقیق‌تر ریاضی، باید در ابتدا یک اختلاف پتانسیل بین ورودی و خروجی مدار تولید کنیم (یعنی رأس $\langle ۱\rangle$ و $\langle n\rangle$ در گراف)، که در عمل تعیین دو عدد دلخواه $\varphi_۱$ و φ_n است. پس از این کار باید اعداد $\varphi_۲, \ldots, \varphi_{n-۱}$ (مقادیر پتانسیل) را برای هر رأس به‌گونه‌ای تعیین کنیم که در یک دستگاه مشخص از معادلات اصطلاحاً اساسی صدق کنند. اما قبل از ارائه‌ی صریح این معادلات، کمی در مورد نحوه‌ی به دست آوردن آنها توضیح می‌دهیم. یک رأس دلخواه از مدار (مثلاً رأس $\langle ۵\rangle$ در شکل ۵) را در نظر بگیرید. از آنجایی که این رأس هیچ منبعی از جریان ندارد، جریان ورودی و خروجی آن برابر است. این در واقع قانون اول کرشهف است که معمولا به این صورت بیان می‌شود: جمع جریان‌های الکتریکی گذرنده از یال‌های یک رأس صفر است. اگر I_{ij} جریان گذرنده از رأس $\langle i, j\rangle$ را نشان دهد، این قانون را در مورد رأس $\langle ۵\rangle$ می‌توان این‌گونه نوشت:

$$I_{۵۲} + I_{۵۶} + I_{۵۸} + I_{۵۷} + I_{۵۳} = ۰ \, .$$

با استفاده از نماد $\sum$ برای جمع زدن و $S_۵$ برای ستاره‌ی رأس $\langle ۵\rangle$، معادله‌ی بالا به صورت خلاصه‌تر زیر درمی‌آید:

$$\sum_{j \in S_۵} I_{۵j} = ۰ \, .$$

و برای رأس دلخواه $\langle i \rangle$ ($i = ۲, \ldots, n-۱$) معادله‌ی متناظر به فرم زیر است:

$$\sum_{j \in S_i} I_{ij} = ۰ .$$

به خاطر داشته باشید که بنابر قانون اهم، جریان I_{ij} برابر با نسبت ولتاژ (اختلاف پتانسیل) $U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ به مقاومت است، یعنی:

$$I_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{R_{ij}} .$$

پس دستگاه معادلات اساسی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\sum_{j \in S_i} \frac{\varphi_i - \varphi_j}{R_{ij}} = ۰, \qquad i = ۲, \ldots, n-۱. \qquad (۱)$$

به پتانسیلی که در این دستگاه از معادلات صدق کند، هارمونیک می‌گوییم. (منظور از اصطلاح پتانسیل بدون صفت "هارمونیک"، یک تابع دلخواه روی رئوس گراف است، یعنی یک دنباله‌ی دلخواه از اعداد $\varphi_۱, \ldots, \varphi_n$.)

حال مسأله‌ی اصلیمان را می‌توانیم به صورت دقیق ریاضی بیان کنیم. اگر یک وزن (مقاومت) R_{ij} از گراف Γ را با مقدار بیشتر R'_{ij} عوض کنیم ($R'_{ij} > R_{ij}$)، آیا امکان دارد که مقاومت کلی مدار افزایش یابد؟

مقاومت کل با فرمول

$$R = \frac{\varphi_۱ - \varphi_n}{I} \qquad (۲)$$

داده می‌شود که در آن

$$I = \sum_{j \in S_۱} \frac{\varphi_۱ - \varphi_j}{R_{۱j}} .$$

(تعبیر فیزیکی این روابط ساده است. بنابر قانون کرشهف، I جریان ورودی رأس $\langle ۱ \rangle$[۲] و $\varphi_۱ - \varphi_n$ اختلاف پتانسیل ورودی و خروجی مدار است. پس بنابر قانون اهم، R مقاومت مدار است.)

وجود پتانسیل هارمونیک (تحلیل مدار الکتریکی)

تحلیل یک مدار مقاومتی با ولتاژ اعمال شده را می‌توان به صورت ریاضی این‌طور بیان کرد: گراف Γ با وزن‌های R_{ij} و پتانسیل‌های $\varphi_۱$ و φ_n در ورودی و خروجی داده شده است، پتانسیل هارمونیک را

[۲] یا جریان خروجی رأس $\langle n \rangle$:

$$I = \sum_{j \in S_n} \left(- \frac{\varphi_n - \varphi_j}{R_{nj}} \right) . \qquad (۲')$$

بیابید؛ یعنی با مقدارهای داده‌شده‌ی $\varphi_۱$ و φ_n، معادلات اساسی (۱) را برای مجهولات $\varphi_۲, \dots, \varphi_{n-۱}$ حل کنید. فیزیکدانان با توجه به مشاهدات تجربی می‌دانند که قانون اول کرشهف (یعنی دستگاه (۱)) به تنهایی برای تحلیل مدار مقاومتی دلخواه کافیست. اما ریاضیدانان به دنبال قضیه‌ای کلی هستند که جنبه‌های ریاضی تحلیل مدار را روشن کند. این قضیه را می‌توان این‌گونه بیان کرد:

قضیه ۱. هر گراف Γ با وزن‌های مثبت R_{ij} به همراه پتانسیل‌های $\varphi_۱$ و φ_n در ورودی و خروجی، تنها یک پتانسیل هارمونیک φ دارد.

ما در اینجا اثبات مستقیم قضیه را به دو دلیل ارائه نمی‌کنیم. اولاً در ادامه به اثبات قضیه احتیاجی نداریم و ثانیاً اثبات دقیق به مفاهیمی از "جبرخطی" احتیاج دارد که معمولاً در دبیرستان تدریس نمی‌شود. ایده‌ی پشت اثبات این است که دستگاه اساسی، $n-۲$ مجهول $\varphi_۲, \dots, \varphi_{n-۱}$ و به همان تعداد معادله‌ی خطی دارد. این معادلات از یکدیگر مستقلند و در نتیجه جواب یکتا دارند.

تمرین ۱. اثباتی دیگر از قضیه‌ی ۱ با استفاده از قضیه‌ی اساسی (که در ادامه خواهد آمد) بیابید.

تمرین ۲. نشان دهید در گراف‌های شکل ۲ هیچ جریانی از یال‌های با مقاومت $R_۰$ رد نمی‌شود. (یعنی اختلاف پتانسیل دو سر آنها صفر است)

تمرین ۳. نشان دهید در حالتی که $\varphi_۱$ و φ_n برابر باشند، جریان کلی I (رابطه‌ی (۲)) برابر صفر است.

تمرین ۴. دستگاه معادلات اساسی را برای گرافی که در شکل ۴ نشان داده شده است، بنویسید و زمان لازم برای حل آن با دست را تخمین بزنید. برنامه‌ای کامپیوتری برای حل این مسأله بنویسید.

تمرین ۵. یکی از مقاومت‌های گراف شکل ۲(a) را دو برابر کنید و افزایش حاصل در مقاومت کل را محاسبه کنید.

تمرین ۶. نشان دهید روابط (۱) و (۲) به همراه قانون اهم، رابطه‌ی (′۲) و همچنین روابط (۱) و (′۲) به همراه قانون اهم، رابطه‌ی (۲) را نتیجه می‌دهد.

برای هر گراف وزن‌دار Γ با رئوس $\langle ۱\rangle, \dots, \langle n\rangle$ و وزن‌ها(مقاومت‌ها)ی مثبت R_{ij} برای یال‌ها، می‌توان پتانسیل هارمونیک φ را محاسبه کرد، یعنی برای هر دو مقدار داده‌شده‌ی $\varphi_۱$ و φ_n در ورودی و خروجی، می‌توان پتانسیل‌های دیگر $\varphi_۲, \dots, \varphi_{n-۱}$ را با حل معادلات (۱) پیدا کرد. علاوه بر این، با قرار دادن مقادیر به دست‌آمده در رابطه‌ی (۲)، می‌توان مقاومت کل مدار (R) را به دست آورد. پس برای یک مدار خاص می‌توانیم امکان کاهش مقاومت مدار پس از افزایش یکی از R_{ij} ها را چک کنیم. اما ما می‌خواهیم یک قانون کلی را ثابت کنیم که می‌گوید: با هر انتخاب مدار، مقاومت مدار با افزایش هیچ یک از مقاومت‌های داخلی کاهش نمی‌یابد.

متأسفانه نمی‌توان اثباتی برای این گزاره فقط با استفاده‌ی مستقیم از روابط (۱) و (۲) ارائه کرد. (اگر ایده‌ی خوبی برای این کار دارید، می‌توانید اثبات خودتان را داشته باشید.)

یک تابع مربعی (توان گرمایی مدار)

برای اثبات گزاره‌ی بالا، می‌توان از یکی از اصول کمینگی استفاده کرد که توزیع افت ولتاژ در مدارهای مقاومتی را توجیه می‌کند. این اصل می‌گوید که جریان در مدار، "تنبل" است، به این معنی که در مدار به گونه‌ای توزیع می‌شود که کمترین مقدار انرژی را مصرف کند (که همان گرمای آزادشده در مقاومت‌های مدار است). به خاطر آورید که جریان I_{ij} گذرنده از یک رسانا با مقاومت R_{ij} ، که متناظر با اختلاف پتانسیل $U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ در دو سر رسانا باشد، توان گرمایی (یعنی نرخ گرمای تولیدشده) زیر را تولید می‌کند:

$$q_{ij} = R_{ij}I_{ij}^{۲} = U_{ij}I_{ij} = \frac{U_{ij}^{۲}}{R_{ij}} = \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^{۲}}{R_{ij}} \,.$$

توان گرمایی تولیدشده در کل مدار، برابر $Q = \sum q_{ij}$ است که جمع روی یال‌های $\langle i, j\rangle$ از گراف زده شده است. توان گرمایی کل Q ، وابسته به مقادیر پتانسیل $\varphi_{۱}, \ldots, \varphi_n$ است؛ درنتیجه آن را با $Q[\varphi]$ نشان می‌دهیم.

پس تا اینجا تابع زیر را معرفی کردیم:

$$Q[\varphi] = \sum_{i,j} q_{ij} = \sum_{i,j} \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^{۲}}{R_{ij}} \,, \qquad (۳)$$

که به آن تابع مربعی گراف مورد نظر خواهیم گفت. (جمع عبارت بالا روی همه‌ی یال‌های $\langle i, j\rangle$ از گراف زده شده است.)

توجه کنید که از دیدگاه ریاضی، ما صرفا یک تابع Q روی همه‌ی پتانسیل‌های φ روی گراف Γ معرفی کردیم و به دنبال مینیمم آن هستیم. (البته این کار بر اساس یک شهود فیزیکی انجام شد)

تابع مربعی Q تنها به یک آرگومان عدی وابسته نیست، بلکه به یک تابع وابسته است که در اینجا همان تابع φ است. ریاضیدانان به این "تابع‌های بر حسب تابع‌ها"، تابعک می‌گویند. جستجوی اکسترمم‌های این تابعک‌ها (مینیمم‌ها و ماکزیمم‌ها) یکی از مسائل اصلی حساب وردش‌ها را تشکیل می‌دهد. این شاخه از ریاضی توسط ژاکوب برنولی، لئونارد اویلر و ژوزف لاگرانژ تأسیس شده است.

تمرین ۷. تابع مربعی Q را برای گراف شکل ۴ بنویسید. آیا هیچ روشی برای یافتن مینیمم‌های آن می‌شناسید؟

راهنمایی: تابع Q به $\varphi_{۲}, \ldots, \varphi_{۱۱} (= \varphi_{n-۱})$ وابسته است، یعنی تابعی چندمتغیره داریم. پیدا

کردن مینیمم توابع چندمتغیره به روش‌هایی خارج از برنامه‌ی درسی دبیرستان احتیاج دارد. با این حال، این روش‌ها تعمیم سرراست روش‌های یافتن مینیمم برای توابع تک‌متغیره است.

اصل کمینگی (کمترین کنش)

ما اینک به دنبال یافتن مینیممی از تابع مربعی Q هستیم. اما آیا Q مینیمم دارد؟ باید جواب این سؤال را روشن کنیم. حتما به درستی حدس زده‌اید که مینیمم وجود دارد (که البته به دلیل "پیش‌زمینه‌ی فیزیکی" مسأله واضح است). در اینجا اثباتی ریاضی از وجود مینیمم آورده شده است، اگر به آن علاقه‌ای ندارید می‌توانید از آن رد شوید.

قضیه ۲. برای مقادیر خاصی از $\varphi_۲, \dots, \varphi_{n-۱}$ ، مقدار تابع Q مینیمم می‌شود.

اثبات: بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد $\varphi_n < \varphi_۱$. مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر متغیرهای $\varphi_۲, \dots, \varphi_{n-۱}$ که در شرط‌های $\varphi_n \leq \varphi_i \leq \varphi_۱$ (برای هر i) صدق کنند را با M نشان دهید. حال یک دسته‌ی دلخواه از مقادیر $\varphi'_۲, \dots, \varphi'_{n-۱} \notin M$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این دسته، دسته‌ای جدید از مقادیر $\varphi''_۲, \dots, \varphi''_{n-۱} \in M$ به این صورت بسازید: به جای همه‌ی مقادیر بیشتر از $\varphi_۱$ ، $\varphi_۱$ ، و به جای همه‌ی مقادیر کمتر از φ_n ، φ_n قرار دهید. بلافاصله می‌توان دید که مقدار تابع Q زیاد نمی‌شود:

$$Q(\varphi''_۲, \dots, \varphi''_{n-۱}) \leq Q(\varphi'_۲, \dots, \varphi'_{n-۱}).$$

پس مینیمم مقدار Q روی مجموعه‌ی M برابر مینیمم مقدار Q روی تمامی پتانسیل‌هاست. حال برای اثبات وجود مینیمم Q کافیست از قضیه‌ی وایرشتراس استفاده کنیم که می‌گوید هر تابع پیوسته‌ی Q روی هر مجموعه‌ی دلخواه بسته و کراندار M دارای مینیمم است. (اثبات این قضیه با تعاریف دقیق پیوستگی، بسته و کراندار بودن، بسیار فراتر از این مقاله است و ما داخل آن نخواهیم شد)

□

اثباتی که ارائه کردیم هیچ روش و راهکاری برای پیدا کردن مینیمم نمی‌دهد و به این خاطر نمونه‌ای از "قضایای وجودی" در ریاضیات است. اما قضیه‌ی بعد مینیمم را مشخص می‌کند و در واقع یک صورت‌بندی از اصل کمینگی در مسأله‌ی ماست.

قضیه‌ی اساسی. پتانسیلی که Q را مینیمم کند، هارمونیک است.

اثبات: فرض کنیم φ° پتانسیل مینیمم کننده‌ی Q باشد. باید نشان دهیم اعداد $\varphi^\circ_1, \ldots, \varphi^\circ_n$ $(\varphi^\circ_1 = \varphi_1, \varphi^\circ_n = \varphi_n)$ در دستگاه معادلات (۱) صدق می‌کنند. همه‌ی متغیرها غیر از یکی، مثلا φ_j را ثابت نگه دارید. در این صورت تابع

$$Q(\varphi^\circ_2, \ldots, \varphi^\circ_{j-1}, \varphi_j, \varphi^\circ_{j+1}, \ldots, \varphi^\circ_{n-1})$$

تابعی تک‌متغیره از φ_j است که در $\varphi_j = \varphi^\circ_j$ مینیمم می‌شود.

این تابع تابعی مربعی با سه جمله بر حسب φ_j است: $Q = a\varphi_j^2 + b\varphi_j + c$ ، که a ، b و c را می‌توان با حذف پرانتزها در (۳) به دست آورید:

$$a = \sum_{i \in S_j} \frac{1}{R_{ij}}, \qquad b = -2 \sum_{i \in S_j} \frac{\varphi^\circ_i}{R_{ij}}$$

از آنجایی که φ°_j مینیمم تابع $(a > 0)$ $a\varphi_j^2 + b\varphi_j + c$ است، رابطه‌ی $a\varphi^\circ_j + \frac{b}{2} = 0$ به دست می‌آید. بنابراین پس از جایگزینی مقادیر a و b :

$$\sum_{i \in S_j} \frac{\varphi^\circ_j}{R_{ij}} - \sum_{i \in S_j} \frac{\varphi^\circ_i}{R_{ij}} = \sum_{i \in S_j} \frac{\varphi^\circ_j - \varphi^\circ_i}{R_{ij}} = 0 .$$

پس $(\varphi^\circ_1, \ldots, \varphi^\circ_n)$ جوابی از دستگاه (۱) است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

و حالا آخرین سوال باقی‌مانده: مقدار مینیمم تابع Q چیست؟ از دیدگاه فیزیکی جواب بدیهی است: مقدار مینیمم Q برابر جمع توان‌های گرمایی آزادشده در یال‌هاست. یعنی توان گرمایی کل مدار، که باید برابر U^2/R باشد. اما باید اینجا اندکی تأمل کنیم. ما توان گرمایی را به وسیله‌ی فرمول U_{ij}^2/R_{ij} برای هر یال تعریف کردیم و نه برای کل مدار. توجه کنید که مقدار مقاومت R و مینیمم Q هر کدام مستقل از یکدیگر به ترتیب بر حسب R_{ij} ها و $U = \varphi_1 - \varphi_n$ تعریف شده‌اند. پس از دیدگاه ریاضی به هیچ وجه درست بودن فرمول ذکرشده برای مینیمم Q واضح نیست. در اینجا هم خواننده می‌تواند از اثبات ریاضی این فرمول رد شود.

قضیه ۳. مقدار مینیمم تابع Q برابر U^2/R است که R مقاومت کلی مدار الکتریکی است.

اثبات: فرض کنیم $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ دسته‌ی اعدادی باشند که Q را مینیمم می‌کنند، بنابر قضیه‌ی اساسی این دسته از اعداد در معادلات (۱) صدق می‌کنند. باید نشان دهیم $(\varphi_1 - \varphi_n)^2/R = (\varphi_1 - \varphi_n)I$ برابر فرمول $\sum(\varphi_i - \varphi_j)I_{ij}$ است (جمع روی همه‌ی یال‌های $\langle i, j\rangle$ زده شده است.) که جریان‌های I و I_{ij} مطابق روابط (۱) و (۲)، در قانون اول کرشهف صدق می‌کنند. می‌توانیم از معادله‌ی (۱) استفاده کنیم و ضریب φ_i را به دست آوریم.

در عبارت $\sum(\varphi_i - \varphi_j)I_{ij}$ ، φ_i در همه‌ی مقادیر جریان I_{ij} که در یال $\langle i, j\rangle$ از رأس $\langle i\rangle$ خارج می‌شوند، ضرب شده است. (اگر عدد j از i کمتر باشد، φ_i در $I_{ij} = -I_{ji}$ ضرب شده است)

پس ضریب φ_i برابر $\sum I_{ij}$ است که جمع روی همه‌ی $\langle j\rangle \in S_i$ ها زده شده است، پس بنابر (۱) این مقدار برای $i \neq ۱, n$ صفر است. به همین ترتیب بنابر (۱) و ($۲'$)، ضرایب $\varphi_۱$ و φ_n برابر I و $-I$ می‌شود. پس با جمع زدن روی همه‌ی یال‌ها داریم:

$$\sum(\varphi_i - \varphi_j)I_{ij} = \varphi_۱ \cdot I + \varphi_n \cdot (-I) = (\varphi_۱ - \varphi_n)I\ .$$

و اثبات کامل است. □

اثبات گزاره‌ی اصلی

حالا می‌توانیم گزاره‌ی اصلی مقاله را ثابت کنیم. فرض کنیم مقاومت یک (یا چندتا) از یال‌ها زیاد شود: $R'_{ij} \geq R_{ij}$. (از اینجا به بعد از پریم برای نمایش مقادیر تغییریافته استفاده می‌کنیم.) در این صورت توابع

$$Q = \sum \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^۲}{R_{ij}}$$

و

$$Q' = \sum \frac{(\varphi_i - \varphi_j)^۲}{R'_{ij}}$$

(جمع روی همه‌ی یال‌های $\langle i, j\rangle$) در نابرابری $Q'[\varphi] \leq Q[\varphi]$ برای هر پتانسیل φ با مقادیر داده‌شده‌ی $\varphi_۱$ و φ_n در ورودی و خروجی، صدق می‌کنند. در نتیجه نامساوی‌های مشابه برای مینیمم‌های توابع Q و Q' صادق است:

$$\min Q' = \frac{(\varphi_۱ - \varphi_n)^۲}{R'} \leq \min Q = \frac{(\varphi_۱ - \varphi_n)^۲}{R}\,,$$

پس $R \leq R'$ و گزاره ثابت می‌شود. □

کاربردهای دیگر این مدل ریاضی

ممکن است این سؤال برای خواننده پیش بیاید که ارائه‌ی صورت‌بندی ریاضی برای حل مسأله‌ای که جواب آن را با ملاحظات فیزیکی می‌توان پیدا کرد، چه سودی دارد؟ نکته این است که مدل‌های ریاضی فقط برای کمک به حل یک مسأله طراحی نشده‌اند. گاهی با چشم‌پوشی از برخی از ویژگی‌های خاص یک مسأله‌ی کاربردی، می‌توان مدل‌هایی از مسأله ساخت که قابلیت استفاده در مسائلی از جنسی کاملا متفاوت داشته باشند. یک محقق با بررسی این مدل‌ها می‌تواند اصطلاحاً با یک تیر چند هدف را همزمان بزند!

در اینجا لیستی از چند مسأله‌ی مرتبط با گراف‌های وزن‌دار آورده‌ایم که در چارچوب نظریه‌ی گراف‌ها و شاخه‌های آن به خوبی حل می‌شوند:

۱. شبکه‌ی کشسان روی خط راست. دوتایی‌های مختلفی از n نقطه روی یک خط به وسیله‌ی تعدادی فنر با سختی‌های متفاوت به هم وصل شده‌اند. به نقاط انتهایی، نیروهای مشخصی وارد شده و مکان نقاط در حالت تعادل خواسته شده است.

۲. قانون دوم کرشهف و فرمول اویلر. این قانون نیز در تحلیل مدارهای الکتریکی کاربرد دارد. تئوری ریاضی این قانون به فرمول اویلر: $V - L + \Gamma = ۱$ مرتبط است که در آن V، L و Γ به ترتیب نشانگر تعداد رئوس، یال‌ها و نواحی یک گراف مسطح هستند.

۳. جریان حمل‌ونقل. یک گراف مسطح می‌تواند نمایانگر یک شبکه از راه‌های (هوایی، ریلی) بین شهری باشد. در این حالت وزن هر یال، هزینه‌ی ترابری در مسیر متناظر است و کم‌هزینه‌ترین توزیع جریان حمل‌ونقل خواسته شده است. در اینجا هم به طرز جالبی این مسأله‌ی کاملاً اقتصادی به یک مدار الکتریکی مرتبط است: اطلاعات کالاها و هزینه‌های حمل‌ونقل در یک مدار وارد می‌شود، یک ولتاژ به مدار القا می‌شود و جواب مسأله را می‌توان از روی آمپرسنج‌ها خواند!

۴. مستطیل‌های کامل. به مستطیل‌هایی که قابل افراز به تعدادی مربع از اندازه‌های متفاوت هستند، کامل می‌گویند. به طرز غیر قابل باوری، همه‌ی مستطیل‌های کامل را می‌توان با ساختن و تحلیل گراف‌های وزن‌دار مناسب به دست آورد.

مسلماً این لیست بسیار کمتر از یک لیست کامل است. مسائل مهم بسیاری را می‌توان به خوبی توسط گراف‌های وزن‌دار حل کرد.

ترجمه‌ی فارسی: مصطفی عین‌اله‌زاده