بسم الله الرحمن الرحیم

مصطفی عین اله زاده
دانش‌جوی دکتری
ریاضی
دانش‌گاه صنعتی شریف

اتحادهای شگفت‌انگیز!

تا به حال چند بار مجبور به ضرب کردن چندجمله‌ای‌ها شده‌اید؟ هزار بار؟ یا حتی ده‌ها هزار بار؟ تنها جاذبه‌ای که این کار ممکن است داشته باشد این است که بعد از حذف پرانتزها و جمع ضرایب جملات مشابه، نتیجه به زیبایی مثال‌های معروف زیر باشد:

$$(a+b)(a-b) = a^{۲} - b^{۲},$$
$$(۱-a)(۱+a+\cdots+a^n) = ۱ - a^{n+۱}.$$

ما در این مقاله اتحادهای مشابهی را بررسی می‌کنیم که البته کم‌تر بدیهی‌اند و از مفهوم عمیق‌تری برخوردار هستند. این اتحادها نتیجهٔ بیش از ۲۰۰ سال تلاش بهترین ریاضی‌دانان جهان هستند. پیشنهاد من به شما خوانندهٔ عزیز این است که قلم و کاغذ به دست گیرید و خودتان محاسبات را تکرار کنید. در این صورت علاوه بر اینکه مطالب مقاله را بهتر درک خواهید کرد، نابدیهی بودن نتایج ارائه شده، تحسین شما را به همراه خواهد داشت.

۱.۱ اتحاد اویلر

در میانهٔ قرن هجدهم - سال ۱۷۴۸ یا کمی زودتر - لئونارد اویلر[۱] به مطالعهٔ ضرایب چندجمله‌ای

$$\phi_n(x) = (۱-x)(۱-x^{۲})(۱-x^{۳})\cdots(۱-x^n).$$

علاقه‌مند شد. او $\phi_n(x)$ را بسط داد و به نتیجهٔ عجیبی رسید.

این مقاله ترجمهٔ برگردان انگلیسی یکی از مقالات مجلهٔ روسی کوانت است:
D. B. Fuchs, *On the Removal of Parentheses, on Euler, Gauss, and MacDonald, and on Missed Opportunities*, in *Kvant Selecta*, Algebra and Analysis II, AMS (1999)
.

[۱] Leonhard Euler

بیایید این محاسبات را خودمان انجام دهیم:

$$
\begin{array}{llllllll}
\phi_1(x) = 1 - x, & & & & & & & \\
\phi_2(x) = 1 - x - x^2 + x^3, & & & & & & & \\
\phi_3(x) = 1 - x - x^2 & +x^4 & +x^5 - x^6, & & & & & \\
\phi_4(x) = 1 - x - x^2 & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}, \\
\phi_5(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 + x^6 & +x^7 & & -x^8 & -x^9 & -x^{10}\cdots, \\
\phi_6(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 & +2x^7 & & & -x^9 & -x^{10}\cdots, \\
\phi_7(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 & +x^7 & +x^8 & & & -x^{10}\cdots, \\
\phi_8(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 & +x^7 & & & +x^9 & \cdots, \\
\phi_9(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 & +x^7 & & & & +x^{10}\cdots, \\
\phi_{10}(x) = 1 - x - x^2 & & +x^5 & & & & & \cdots.
\end{array}
$$

سه‌نقطه‌های بالا به جملاتی مربوط می‌شوند که شامل توان‌های x با نمای بیش‌تر از ۱۰ هستند. اندازهٔ صفحه، به ما اجازهٔ نوشتن بسط کامل این چندجمله‌ای‌ها را نمی‌دهد، چون به عنوان مثال درجهٔ $\phi_{10}(x)$ برابر ۵۵ است.

بیایید از مشاهدهٔ ساده و در عین حال مهمی شروع کنیم: با افزایش n، ضرایب $\phi_n(x)$ تثبیت می‌شوند. یعنی برای هر k ضریب x^k در $\phi_n(x)$ بعد از مقدار مشخصی از n، تغییر نمی‌کند. توضیح این مطلب ساده است: چندجمله‌ای $\phi_n(x)$ حاصل‌ضرب $\phi_{n-1}(x)$ و $1 - x^n$ است، در نتیجه تبدیل $\phi_{n-1}(x)$ به $\phi_n(x)$، اثری روی ضرایب ۱، x، $\ldots$ ، x^{n-1} ندارد. پس برای $k < n$ ضریب x^k در $\phi_n(x)$ به n وابسته نیست. مثلاً قسمتی از $\phi_{10}(x)$ که در بالا محاسبه شده است، در $\phi_{11}(x)$ و $\phi_{12}(x)$ تغییر نمی‌کند.

حاصل این مشاهده این است که ما می‌توانیم به حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\phi(x) = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)\cdots,$$

معنی بدهیم. البته این حاصل‌ضرب دیگر یک چندجمله‌ای نیست، بلکه یک سری توانی است؛ یعنی یک عبارت صوری به شکل

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

که a_0، a_1، a_2، a_3، a_4، $\ldots$ عددهای حقیقی هستند. در مسألهٔ ما این اعداد مقادیری هستند که ضرایب جملات، بعد از تثبیت شدن به آن‌ها می‌رسند. پس محاسبات ما نشان می‌دهد که:

$$
\begin{aligned}
& a_0 = a_5 = a_7 = 1, \\
& a_1 = a_2 = -1, \\
& a_3 = a_4 = a_6 = a_8 = a_9 = 0.
\end{aligned}
$$

حاصل‌ضرب نامتناهی $\phi(x)$ با نام تابع اویلر شناخته شده است. استفادهٔ ما از کلمهٔ تابع در اینجا بی‌پایه نیست، چون برای مقادیر $-1 < x < 1$ ، $\phi(x)$ مقداری دارد که خیلی شبیه محاسبهٔ یک سری هندسی، به دست می‌آید.

حالا یک مشاهدهٔ اساسی: بعد از حذف پرانتزها در ضرب، بسیاری از جملات یک‌دیگر را حذف می‌کنند. مثلاً در بسط

$(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{10})$، توان x در ۴۳ تا از جملات، کم‌تر یا مساوی ۱۰ و در ۲۴ تای آن‌ها ۸، ۹ و ۱۰ است. بعد از جمع‌آوری جملات مشابه، فقط ۵ تا از این ۴۳ جمله باقی می‌ماند و همهٔ جملاتی که توان x در آن‌ها ۸، ۹ و ۱۰ است، از بین می‌روند. علاوه بر این دیدیم که در میان $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ فقط سه تا برابر۱، دو تا برابر ۱− و باقی آن‌ها (که اکثریت را تشکیل می‌دهند) برابر ۰ اند. پس به این حدس می‌رسیم: همهٔ ضرایب a_k برابر ۰، ۱ یا ۱− هستند و بیش‌تر آن‌ها را ۰ تشکیل می‌دهد. محاسبات بیش‌تر (که ممکن است شما هم آن را انجام دهید) حدس را ثابت نمی‌کند، اما آن را دقیق‌تر خواهد کرد. اینجا برای مثال قسمتی از سری $\phi(x)$ که توان‌های کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ از x را دارد، آورده‌ایم:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}\\ &\quad +x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}+\cdots.\end{aligned}$$

به راحتی می‌توان تصور کرد که اویلر با وجود مهارت فوق‌العاده‌ای که در محاسبات طولانی داشته است، حداقل این تعداد از جملات $\phi(x)$ را به دست آورده باشد و حتماً ملاحظه کرده است که همهٔ ضرایب ناصفر ۱ و ۱− هستند و این ضرایب به صورت بی‌قاعده ظاهر نمی‌شوند، بلکه با ترتیب دقیق دو مثبت، دو منفی، دو مثبت، ... می‌آیند. احتمالاً قرار دادن نماهایی از x که در بسط ظاهر می‌شوند در جدولی مانند جدول پایین، به او امکان حدس قانون قرارگیری علامت‌ها را داده است.

نماها	۱، ۲	۵، ۷	۱۲، ۱۵	۲۲، ۲۶	۳۵، ۴۰	۵۱، ۵۷	۷۰، ۷۷	۹۲، ۱۰۰
ضرایب	۱−	۱	۱−	۱	۱−	۱	۱−	۱

در واقع در سطر بالایی ستون n ام، $\frac{3n^2\pm n}{2}$ و در سطر پایین $(-1)^n$ قرار دارد. اگر این قانون برای هر n برقرار باشد، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\\ &\quad = 1-x-x^2+x^5+x^7-\cdots+(-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}}+(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}+\cdots,\end{aligned}$$

که در صورت خلاصه‌تر شده، اینطور می‌شود:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

این اتحاد به اتحاد اویلر معروف است. ریاضی‌دانان نسل‌های بعد از اویلر، اثبات‌های متعددی برای این اتحاد به دست آورده‌اند. یکی از این اثبات‌ها در قسمت ۳ آورده شده است، که می‌توانید در بار اول مطالعه از آن عبور کنید. اتحاد اویلر کاربرد مهمی دارد که در هر کتاب درسی ترکیبیات یافت می‌شود.

۲.۱ اتحاد اویلر و تعداد افرازها

n را عددی طبیعی در نظر بگیرید. تعداد راه‌های نمایش n به صورت جمع تعدادی عدد طبیعی را با $p(n)$ نمایش می‌دهیم. در این نحوه از نمایش، جملات تکراری قابل قبول است و دو نمایش که فقط در ترتیب جملات با یک‌دیگر تفاوت دارند را یکی می‌گیریم. پس داریم:

$$\begin{aligned}
&p(۱) = ۱;\\
&p(۲) = ۲ \quad (۲ = ۲; ۲ = ۱ + ۱);\\
&p(۳) = ۳ \quad (۳ = ۳; ۳ = ۲ + ۱; ۳ = ۱ + ۱ + ۱);\\
&p(۴) = ۵ \quad (۴ = ۴; ۳ + ۱; ۴ = ۲ + ۲; ۴ = ۲ + ۱ + ۱; ۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱);\\
&p(۵) = ۷ \quad (۵ = ۵; ۵ = ۴ + ۱; ۵ = ۳ + ۲; ۵ = ۳ + ۱ + ۱; ۵ = ۲ + ۲ + ۱;\\
&\qquad\qquad ۵ = ۲ + ۱ + ۱ + ۱; ۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱).
\end{aligned}$$

از آن‌جایی که مقادیر $p(n)$ در فرمول‌های ریاضی زیادی ظاهر می‌شود، توانایی محاسبهٔ آن‌ها سودمند است. اما چگونه؟ شما ممکن است با کار زیاد و کمی خوش‌شانسی بتوانید مقدار $p(۱۰) = ۴۲$ را به صورت دستی حساب کنید. اما برای $p(۵۰)$ چطور؟ محاسبهٔ $p(۵۰)$ به صورت مستقیم تقریبا غیرممکن است، ولی با کمک اتحاد اویلر تبدیل به تمرینی ساده می‌شود.

برای توضیح این ترفند، به کمی نظریه‌پردازی احتیاج داریم. قرار دهید

$$\pi(x) = ۱ + p(۱)x + p(۲)x^۲ + p(۳)x^۳ + \cdots = ۱ + x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + ۵x^۴ + ۷x^۵ + \cdots .$$

$\pi(x)$ هم برای مقادیر $-۱ < x < ۱$ یک تابع است. اما همانند $\phi(x)$، ما فقط به سری توانی آن علاقه‌مند هستیم.

قضیه ۱. دو سری $\phi(x)$ و $\pi(x)$ وارون یک‌دیگرند:

$$\phi(x).\pi(x) = ۱.$$

ضرب دو سری توانی $a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots$ و $b_۰ + b_۱x + b_۲x^۲ + \cdots$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
(a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots)&(b_۰ + b_۱x + b_۲x^۲ + \cdots)\\
&= a_۰b_۰ + a_۰b_۱x + a_۰b_۲x^۲ + \cdots + a_۱b_۰x + a_۱b_۱x^۲ + a_۱b_۲x^۳ + \cdots\\
&\quad + a_۲b_۰x^۲ + a_۲b_۱x^۳ + a_۲b_۲x^۴ + \cdots\\
&= a_۰b_۰ + (a_۰b_۱ + a_۱b_۰)x + (a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰)x^۲ + \cdots .
\end{aligned}$$

پس صورت قضیهٔ بالا بیان می‌کند که سری توانی حاصل از ضرب $\pi(x)$ و $\phi(x)$ با سری ثابت ۱ برابر است. علی‌الخصوص ضرایب x، $x^۲$، … در حاصل‌ضرب برابر ۰ هستند.

اثبات.

$$\begin{aligned}\frac{۱}{\phi(x)} &= \frac{۱}{۱-x}\cdot\frac{۱}{۱-x^{۲}}\cdot\frac{۱}{۱-x^{۳}}\cdot\dots\cdot\frac{۱}{۱-x^{k}}\cdot\dots\\ &= (۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots)(۱+x^{۲}+x^{۴}+x^{۶}+\cdots)\\ &\quad \cdots(۱+x^{k}+x^{۲k}+x^{۳k}+\cdots)\cdots.\end{aligned}$$

صورت بازشدهٔ آخرین جمع، همهٔ تک‌جمله‌ای‌های به صورت

$$x^{a_۱}x^{۲a_۲}\cdots x^{ka_k}$$

است که a_i ها اعداد صحیح نامنفی هستند. برای هر n، x^n در جمع به تعداد راه‌های متفاوت نمایش n به صورت

$$n = a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + ka_k$$

و یا معادلاً به فرم

$$\underbrace{۱+\cdots+۱}_{a_۱}+\underbrace{۲+\cdots+۲}_{a_۲}+\cdots+\underbrace{k+\cdots+k}_{a_k}$$

ظاهر می‌شود. از آن‌جایی که تعداد راه‌های نمایش n به صورت $a_۱+۲a_۲+\cdots+ka_k$ برابر $p(n)$ است، ضریب x^n در حاصل‌ضرب مورد بررسی برابر $p(n)$ است؛ $\frac{۱}{\phi(x)}=\pi(x)$ و اثبات کامل می‌شود.
$p(۰)$ را برای راحتی برابر ۱ قرار دهید و بنویسید:

$$(۱-x-x^{۲}+x^{۵}+x^{۷}+\cdots)(p(۰)+p(۱)x+p(۲)x^{۲}+\cdots)=۱.$$

ضرایب پرانتز اول در سمت چپ، به وسیلهٔ قانون اویلر تعیین می‌شوند. حال حاصل‌ضرب سمت چپ را بسط داده و ضرایب x، $x^{۲}$، ... را مساوی صفر قرار دهید. به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&p(۱)-p(۰)=۰;\\ &p(۲)-p(۱)-p(۰)=۰;\\ &p(۳)-p(۲)-p(۱)=۰;\\ &\quad\vdots\\ &p(n)-p(n-۱)-p(n-۲)+p(n-۵)+p(n-۷)+\cdots=۰.\end{aligned}$$

جمع سمت چپ تا جایی که آرگومان p نامنفی باشد، ادامه پیدا می‌کند. پس داریم:

$$p(n)=p(n-۱)+p(n-۲)-p(n-۵)-p(n-۷)+\cdots.$$

این فرمول اساس یک روش عملی تولید لیست‌های طولانی از مقادیر $p(n)$ است. روش محاسبه به این صورت است: دو

شکل ۱

نوار کاغذ هم‌اندازهٔ طولانی و باریک بسازید و آن‌ها را در کنار هم روی میز، مقابل خود قرار دهید و با استفاده از خط‌کش آن دو را به سطرهایی به ارتفاع نیم اینچ تقسیم کنید. روی سطر پایینی نوار سمت راست یک علامت ستاره بکشید. سپس روی نوار سمت راست با شمارش سطرها از پایین به بالا، یک علامت مثبت روی سطر اول و دوم قرار دهید، یک منفی روی سطر پنجم و هفتم، یک مثبت روی سطر دوازدهم و پانزدهم و به همین ترتیب تا بالاترین سطر نوار. حال روی نوار چپ به ترتیب از بالا به پایین روی سطرها مقادیری از $p(n)$ که می‌دانید را با شروع از $p(۰)$ وارد کنید: $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۷, \ldots$. برای به دست آوردن اولین مقدار بعدی از $p(n)$ ها، نوار سمت راست را روی میز به سمت بالا حرکت دهید تا سطر پایین آن - که ستاره‌دار است - مجاور با اولین سطر خالی از نوار سمت چپ شود. همهٔ مقادیر نوار سمت چپ را که مجاور علامت مثبت هستند، جمع بزنید و همهٔ آن‌هایی که مجاور علامت منفی هستند را از آن کم کنید. نتیجه را در سطر مجاور ستاره وارد کنید. این مقدار خواسته‌شدهٔ $p(n)$ است. حالا نوار سمت راست را یک سطر پایین بکشید و همین محاسبه را تکرار کنید. اگر این کار را به همین ترتیب ادامه دهید، پس از چند دقیقه نوار سمت چپ کاملا با مقادیر متوالی $p(n)$ پر می‌شود. من با استفاده از این روش، همهٔ اعداد $p(n)$ را برای $n \leq ۵۰$ پیدا کردم. این کار برای من ۱۷ دقیقه طول کشید.[۲] تعدادی از مراحل اولیهٔ این روند محاسبه در شکل ۱ نشان داده شده است. به عنوان مثال،

$$p(۵۰) = ۲۰۴۲۲۶.$$

به راحتی می‌توان تصور کرد که محاسبهٔ سرراست، بدون استفاده از ترفند اویلر تا چه حد می‌توانست زمان‌بر باشد.

[۲] یادداشت مترجم انگلیسی. این نشان می‌دهد که نویسندهٔ مقاله در محاسبات عددی همانند اویلر تواناست. دو تن از دوستان من که با همراهی یک‌دیگر این کار را انجام دادند، برای آن ۱ ساعت وقت صرف کردند.

۳.۱ اثبات اتحاد اویلر

بیایید پرانتزهای حاصل‌ضرب را حذف کنیم:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots.$$

نتیجه یک سری نامتناهی خواهد بود که در آن $\pm x^n$ به تعداد راه‌های نمایش n به صورت جمع یک دنبالهٔ اکیداً صعودی از اعداد طبیعی: $n = n_1+\cdots+n_k$، $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$، ظاهر می‌شود. علامت x^n برای k های زوج مثبت و برای k های فرد، منفی است. در ادامهٔ این قسمت واژهٔ افراز را برای یک دنبالهٔ $(n_1, \cdots, n_k)$ به کار می‌بریم که $n = n_1+n_2+\cdots+n_k$ و $n_1 < \cdots < n_k$. همچنین به k طول افراز می‌گوییم.

افرازها را به سه رده تقسیم می‌کنیم. برای افراز دادهٔ شدهٔ $(n_1, \cdots, n_k)$، فرض کنیم s بیش‌ترین عددی باشد که $n_k - n_{k-s+1} = s-1$. به عبارت دیگر آخرین s عضو دنباله یعنی $n_{k-s+1}, \cdots, n_k$ متوالی باشند. به وضوح $s \le k$. مثلاً برای افراز $6+4+2=12$، s برابر با ۱، برای افراز $6+5+1=12$، s برابر با ۲ و برای افراز $9+8+7+5+4=33$، s برابر با ۳ است. رده‌بندی ما برای افرازهای $(n_1, \cdots, n_k)$ به صورت زیر است:

ردهٔ یک: اگر $n_1 \le s$ مگر در حالتی که $n_1 = s = k$؛

ردهٔ دو: اگر $n_1 > s$ مگر در حالتی که $n_1 = s+1$ و $s = k$؛

ردهٔ سه: دو حالت باقی‌مانده، یعنی $s = k$ و $s+1$ یا $n_1 = s$.

به هر افراز $(n_1, \cdots, n_k)$ از ردهٔ یک، افراز زیر را متناظر می‌کنیم:

اگر $k - n_1 \ge 2$، $(n_2, \cdots, n_{k-n_1}, n_{k-n_1+1}+1, \cdots, n_k+1)$،

اگر $k - n_1 = 1$، $(n_2+1, \cdots, n_k+1)$.

این دنباله افرازی از ردهٔ دوم است. (بررسی کنید!) در نتیجه یک نگاشت از همهٔ افرازهای ردهٔ یک به افرازهای ردهٔ دو داریم. این نگاشت در واقع یک تناظر یک‌به‌یک بین افرازهای دو رده برقرار می‌کند. اگر $(n_1, \cdots, n_k)$ افرازی از ردهٔ دوم باشد، افراز متناظر از ردهٔ اول به صورت زیر داده می‌شود:

اگر $k - s \ge 1$، $(s, n_1, \cdots, n_{k-s}, n_{k-s+1}-1, \cdots, n_k-1)$،

اگر $k - s = 0$، $(s, n_1-1, \cdots, n_s-1)$.

که s مانند بالا تعریف شده است. از آن‌جایی که اختلاف طول افرازهایی که به این صورت در تناظر قرار می‌گیرند برابر با ۱ است، جملات متناظر $\pm x^n$ با یک‌دیگر حذف می‌شوند. پس مجموع کلی فقط شامل جملات متناظر با افرازهای ردهٔ سوم است، که بنابر تعریف افرازهای به شکل

$$(k, k+1, \cdots, 2k-1), \qquad (k+1, k+2, \cdots, 2k),$$

هستند. برای اولی داریم:

$$n = k + (k+1) + \cdots + (2k-1) = \frac{3k^2-k}{2};$$

و برای دومی:

$$n = (k+1) + (k+2) + \cdots + 2k = \frac{3k^2+k}{2}.$$

به این صورت جملهٔ متناظر در سری اویلر یا $(-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}}$ است و یا $(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}$. پس اثبات کامل می‌شود.

۴.۱ اتحاد گاوس

حدودا ۷۰ سال بعد از کشف اویلر، ریاضی‌دان بزرگی به نام کارل فردریش گاوس[3]، گام بعدی را (به دلایلی که نمی‌توانیم این‌جا شرح دهیم) در جهت ساختن آنچه بعدها با نظریهٔ فرم‌های مدولار[4] شناخته شد، برداشت. گاوس تابع اویلر را به توان ۳ رساند و به سری توانی‌ای رسید که حتی از سری اصلی اویلر بسیار جالب‌تر بود:

$$\begin{aligned}\phi(x)^3 &= (1-x)^3(1-x^2)^3(1-x^3)^3\cdots\\ &= 1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-11x^{15}+\cdots.\end{aligned}$$

به خواننده توصیه می‌شود تا ضرایب جملات x^n از عبارت بالا را برای مقادیر $n \le 15$ (همانند بالا) حساب کند. به عبارت دقیق‌تر:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

این اتحاد به اتحاد گاوس معروف است. اتحاد گاوس از این جهت خیلی عجیب است که مربع تابع اویلر:

$$\phi(x)^2 = 1-2x-x^2+2x^3+x^4+2x^5-2x^6-2x^8-2x^9+x^{10}+\cdots$$

اصلا جالب به نظر نمی‌رسد. در میان بقیهٔ ضرایب اعداد ۳، ۴ و ... ظاهر می‌شوند و این ضرایب هیچ نوع نظمی نشان نمی‌دهند.

جهت دیگر عمیق بودن اتحاد گاوس، اثبات‌های متعددی است که از شاخه‌های کاملا مختلف ریاضی مانند هندسهٔ ریمانی تا جبر همولوژی برای آن وجود دارد. یک اثبات مقدماتی (مثل قسمت ۳) برای این اتحاد می‌توان ارائه کرد، اما این اثبات زحمت زیادی دارد و ما هیچ اثباتی که برای ارائه در این مجله مناسب باشد، پیدا نکرده‌ایم. شاید یکی از خوانندگان بتواند اثباتی مناسب پیدا کند!

۵.۱ توان‌های تابع اویلر

صورت سادهٔ سری‌های $\phi(x)$ و $\phi(x)^3$ را پیدا کردیم، همچنین دیدیم $\phi(x)^2$ فرمول ساده ندارد. اما در مورد سری‌های $\phi(x)^4$، $\phi(x)^5$، ... چه می‌توانیم بگوییم؟ برای چه مقادیری از n فرمول‌های ساده‌ای برای ضرایب $\phi(x)^n$ وجود دارد؟ برای جواب دادن به این پرسش نادقیق، یک محک غیردقیق ارائه می‌کنیم. برای هر n داده شده، وجود تعداد زیادی صفر در ضرایب توان‌های x در $\phi(x)^n$ نشان‌دهندهٔ وجود یک فرمول از نوع اویلری یا گاوسی برای سری $\phi(x)^n$ است. (اگر تعداد صفرها کم باشد یا اصلا صفری موجود نباشد، هیچ چیز خاصی قابل پیش‌بینی نیست.) به درخواست ما ای. آی. کورکینا ضرایب x، x^2، ...، x^{50} را با استفاده از کامپیوتر برای سری‌های $\phi(x)$، ...،، $\phi(x)^{15}$ پیدا کرده است. من افراد آشنا با برنامه‌نویسی را برای تکرار این محاسبه تشویق می‌کنم. بر اساس محاسبات کورکینا (که در اینجا به همگی آن‌ها هم احتیاج

[3] Carl Friedrich Gauss

[4] Modular Forms

نداریم) به جدول زیر می‌رسیم که $c(n)$ تعداد صفرها در میان ضرایب x ، x^2 ، $\dots$ ، x^{50} را در $\phi(x)^n$ نمایش می‌دهد:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$c(n)$	۴۰	۱۷	۴۱	۱۰	۰	۱۵	۰	۱۹	۰	۱۰	۰	۰	۰	۱۳	۰

جدول را به این صورت می‌توان جمع‌بندی کرد: برای $n = 1, 3$ تعداد صفرها بسیار زیاد است. (همانطور که می‌دانستیم) برای $n = 2, 4, 6, 8, 14$ این تعداد نسبتا زیاد است و برای $n = 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15$ هیچ صفری وجود ندارد.
زیادی صفرها برای $n = 2, 4, 6$ عجیب نیست. دلیلش این است که سری‌های $\phi(x)$ و $\phi(x)^3$ آن قدر تنک هستند[۵] که جملات موجود در $\phi(x)\phi(x)$، $\phi(x)\phi(x)^3$ و $\phi(x)^3\phi(x)^3$ نمی‌توانند آن قدر به یک‌دیگر نزدیک شوند تا تمامی نماها را پوشش دهند. مثلاً اعداد $11, 18, 21$ و تعداد زیاد دیگری از اعداد را نمی‌توان به صورت حاصل‌جمع دو عدد به صورت $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ نمایش داد، در نتیجه مضارب ثابت x^{11}, x^{18}, x^{21} در $\phi(x)^2$ غایب هستند. به دلیل مشابه مضارب x^9, x^{14}, x^{19} در $\phi(x)^4$ و مضارب x^5, x^8, x^{14} در $\phi(x)^6$ ظاهر نمی‌شوند.
پرش‌های ناگهانی $c(n)$ برای $n = 8, 10, 14$ به راحتی قابل توجیه نیست. در واقع اتحادهایی برای $\phi(x)^8, \phi(x)^{10}, \phi(x)^{14}$ وجود دارد که هر چند به اتحادهای اویلر و گاوس شباهت دارند، ولی به زیبایی آن‌ها نیستند. (هم‌چنین اتحادی برای $\phi(x)^{15}$ وجود دارد، گرچه در جدول ما رخ‌نمایی نمی‌کند.) اینجا برای مثال اتحاد $\phi(x)^8$ ، متعلق به فلیکس کلاین[۶] را آورده‌ایم:

$$\phi(x)^8 = \sum \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2}(3klm - kl - lm - mk)\right] x^{-(kl+lm+mk)}.$$

جمع روی همهٔ سه‌تایی‌های (k, l, m) از اعداد صحیح بسته می‌شود که $k + l + m = 1$.
(با وجود اینکه این اتحاد خیلی هم ساده نیست، اما نشان می‌دهد که اگر عدد صحیح n را نتوان به صورت $-(kl+lm+mk)$ نمایش داد که k, l, m صحیح و با حاصل‌جمع ۱ هستند - یا معادلاً به صورت $k^2 + l^2 + kl - k - l$ برای k, l دل‌خواه - در این‌صورت سری $\phi(x)^8$ شامل مضربی از x^n نیست. مثلاً اعداد صحیحی که باقیماندهٔ تقسیمشان بر ۴ برابر ۳ هست این‌گونه هستند، همین‌طور $13, 18, 28, 29$. در نتیجه این اعداد در نماهای سری $\phi(x)^8$ ظاهر نمی‌شوند.)
آنچه تا به حال روشن شد این است که در میان همهٔ اعداد طبیعی، تنها برای نماهای بسیار خاص و ویژه‌ای از n ، $\phi(x)^n$ دارای یک فرم (کمابیش) ساده است. معمای این نماهای "ویژه" هم تنها اخیراً (آن هم کمابیش) توسط یک ریاضی‌دان انگلیسی به نام یان مک‌دونالد[۷] حل شده است. شرح بسیار زیبایی از این کشف مک‌دونالد را می‌توان در مقاله‌ای از دایسون با عنوان " فرصت‌های از دست‌رفته" پیدا کرد. این مقاله در سال ۱۹۷۲ در مجلهٔ آگهی‌نامهٔ جامعهٔ ریاضی آمریکا چاپ شده است.[۸]

در اینجا می‌خواهم توضیحات کوتاهی دربارهٔ دایسون و مقاله‌اش بدهم. دایسون با وجود تحصیلات عالی در رشتهٔ ریاضی، یکی از برجسته‌ترین فیزیک‌دانان عصر ماست. هدف اصلی مقالهٔ او این است که با ارائهٔ تعدادی مثال‌های روشن‌گرانه، نشان دهد که عدم ارتباط مناسب میان متخصصان دو رشتهٔ ریاضی و فیزیک، تا چه حد می‌تواند در به تأخیر افتادن کشف دست‌آوردهای بزرگ (حتی تا دهه‌ها) در هر یک از دو رشته مؤثر باشد. از آن‌جایی که مقالهٔ دایسون برای دانش‌آموزان دبیرستانی نوشته نشده است، مطالب زیادی در آن برای شما قابل فهم نیست. اما مطمئنم که مطالعهٔ آن برای شما لذت‌بخش خواهد بود. در اینجا گزیده‌ای از مقالهٔ دایسون را که دقیقاً راجع به مسألهٔ ماست، آورده‌ایم:

[۵] یعنی تعداد زیادی از جملات آن‌ها برابر صفر است

[۶] Felix Klein

[۷] Ian G. Macdonald

[۸] Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 78 (972), pp. 635-652.

۶.۱ ماجرای دایسون

«می‌خواهم با صحنهٔ روشنی از تجربهٔ شخصی‌ام شروع کنم که نشان می‌دهد عادت تخصص‌گرایی تا چه حد می‌تواند موجب از دست رفتن فرصت‌ها شود. ... من زندگی‌ام را به عنوان یک نظریه‌اعداددان شروع کردم و در دوران تحصیلم در مقطع کارشناسی در دانشگاه کمبریج، بسیار شیفتهٔ شخصیت اسطوره‌ای جی. اچ. هاردی[۹] بودم. در آن روزها حتی برای یک دانشجوی کارشناسی روشن بود که سبک ریاضی هاردی و رامانوجان[۱۰] خیلی قدیمی شده است و آیندهٔ باشکوهی نخواهد داشت. خود هاردی هم در یک درس‌نامهٔ چاپ‌شده دربارهٔ تابع τ رامانوجان، این موضوع را به عنوان یکی از "مرداب‌های ریاضی" توصیف کرده بود. تابع τ به وسیلهٔ ضرایب سری زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n=\phi(x)^{24}=\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{24}. \qquad (1)$$

رامانوجان تعدادی از خواص نظریه‌اعدادی قابل توجه τ را کشف کرده بود.»

«اثبات و تعمیم این خواص توسط موردل[۱۱]، هکه[۱۲] و دیگران، نقش اساسی در پیشرفت نظریهٔ فرم‌های مدولار داشته است. اما خود تابع τ مثل مردابی بی‌تحرک، جدای از جریان اصلی ریاضی باقی ماند و فقط تعدادی افراد غیرحرفه‌ای، به دور از فشار رقابت با ریاضی‌دانان حرفه‌ای، به صورت تفننی روی آن کار می‌کردند. من تا مدت‌ها بعد از این‌که یک فیزیک‌دان شدم، رابطهٔ احساسی خودم را با τ حفظ کردم و برای فراغت از کار جدی مطالعهٔ فیزیک، هر از گاهی سری به مقالات رامانوجان می‌زدم و روی مسائل جذاب حل‌نشده‌ای که او به جا گذاشته بود، فکر می‌کردم. چهار سال پیش، در یکی از این روزهای تعطیل کار فیزیک، فرمولی بسیار زیبا برای تابع τ پیدا کردم تا جایی که از اینکه رامانوجان به این فرمول فکر نکرده بود، شگفت‌زده شدم. آن فرمول به این صورت است:

$$\tau(n)=\sum\frac{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e)}{1!2!3!4!}, \qquad (2)$$

که جمع روی همهٔ مجموعه‌های a,b,c,d,e از اعداد صحیح با خاصیت زیر زده شده است:

$$a,b,c,d,e\overset{5}{\equiv}1,2,3,4,5,\quad a+b+c+d+e=0,\quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=10n.$$

این فرمول را می‌توان بنابر (۱) به عنوان فرمولی از برای توان ۲۴ ام $\phi(x)$ در نظر گرفت. [این فرمول را با فرمول $\phi(x)^8$ مقایسه کنید - نگارنده] ایدهٔ این فرمول با نامه‌ای از وینکوییست[۱۳] در مورد فرمولی برای توان ۱۰ام ϕ، به ذهنم رسید. وینکوییست هم اتفاقاً فیزیک‌دانی بود که اوقات فراغتش را با نظریه‌اعداد کلاسیک می‌گذراند.»

«با دنبال کردن این ایده‌های پیش پا افتادهٔ خودم، به فرمولی به زیبایی فرمول (۲) برای توان‌های d ام ϕ، برای d هایی که

[۹] Godfrey Harold Hardy

[۱۰] Ramanujan

[۱۱] Mordell

[۱۲] Hecke

[۱۳] Winquist

در دنبالهٔ زیر قرار دارند، رسیدم:

$$d = ۳, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۵, ۲۱, ۲۴, ۲۶, ۲۸, ۳۵, ۳۶, \ldots . \qquad (۳)$$

[اینها همان "نماهای ویژه" هستند - نگارنده] در واقع حالت $d = ۳$ توسط ژاکوبی[۱۴]، حالت $d = ۴$ توسط کلاین و فریکه[۱۵] و حالت‌های $d = ۱۴, ۲۶$ توسط اتکین[۱۶] کشف شده بودند. من همین‌جا متوقف شدم و مدت کوتاهی به این دنبالهٔ درخشان خیره شدم. اما چون در آن موقع یک نظریه‌اعداددان بودم، اعداد دنباله معنی خاصی برایم نداشت. ذهنم تا حدی دو شاخه شده بود که این که این دنباله را بارها در کارهای فیزیکیم دیده بودم، اصلاً به یاد نمی‌آوردم. اگر این اعداد در رابطه با یک مسألهٔ فیزیکی مطرح شده بود، مسلماً تشخیص می‌دادم که آن‌ها بعدهای جبرهای لی ساده[۱۷]، با بعد متناهی هستند. غیر از ۲۶، که هنوز نمی‌دانم چرا در دنباله است.»

ببخشید فراموش کردم شما با جبرهای لی ساده آشنا نیستید. در واقع خیلی هم مهم نیست. من سعی می‌کنم مستقیماً توضیح دهم که اعداد دنبالهٔ (۳) چه اعدادی هستند. به خاطر آورید که دوران‌های صفحه به یک پارامتر یعنی زاویهٔ دوران وابسته‌اند؛ دوران‌های فضا هم به سه پارامتر، یعنی طول و عرض جغرافیایی محور دوران و زاویهٔ دوران. به طور کلی "دوران"های فضای n بعدی به $\frac{n(n-۱)}{۲}$ پارامتر و "دوران"های فضای مختلط n بعدی به $n^۲ - ۱$ پارامتر وابسته‌اند. به این دو دنبالهٔ $\frac{n(n-۱)}{۲}$ و $n^۲ - ۱$ (یعنی اعداد $۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, \ldots$ و $۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ۳۵, \ldots$) باید ۵ "بعد استثنائی" یعنی ۱۴، ۵۲، ۷۸، ۱۳۳ و ۲۴۸ را اضافه کرد. دست‌آخر با چشم‌پوشی از دو عدد ۱ و ۶ (همانند کاری که دایسون کرده است)، به دنبالهٔ (۳) می‌رسیم که برای هر فیزیک‌دان نظری آشناست. حال به روایت دایسون برگردیم:

«این طور بود که من فرصت کشف رابطه‌ای عمیق‌تر بین فرم‌های مدولار و جبرهای لی را از دست دادم؛ فقط به خاطر اینکه دایسون نظریه‌اعداددان و دایسون فیزیک‌دان با هم صحبت نمی‌کردند.»

«اما این داستان پایان خوشی داشت. یک هندسه‌دان انگلیسی به نام یان مک‌دونالد، که من او را نمی‌شناختم، همین فرمول را به عنوان حالت خاصی از یک نظریهٔ کلی‌تر کشف کرده بود. در نظریهٔ او جبرهای لی از ابتدا وجود داشت و در واقع رابطهٔ آن با فرم‌های مدولار غیرمنتظره بود. در هر صورت، مک‌دونالد رابطه را کشف کرد و از فرصتی که من از دست داده بودم، استفاده کرد. اتفاق دیگر این بود که وقتی هر دوی ما روی این مسأله فکر می‌کردیم، مک‌دونالد هم در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در پرینستون حضور داشت و چون دختران ما در یک کلاس مدرسه بودند، ما یک‌دیگر را هر از گاهی در سال حضور او در پرینستون می‌دیدیم. اما چون او یک ریاضی‌دان و من یک فیزیک‌دان بودم، کارهایمان را با هم درمیان نمی‌گذاشتیم. این که ما در آن زمان در نزدیکی هم، روی یک مسأله فکر می‌کردیم، فقط بعد از بازگشتمان به آکسفورد برای ما روشن شد. این هم یک فرصت از دست‌رفته بود، ولی خیلی هم فاجعه‌آمیز نبود، چون خوشبختانه مک‌دونالد بدون هیچ کمکی از جانب من، آن مسأله را به طور کامل به تنهایی حل کرد.»

۷.۱ نتیجه‌گیری

مطالب ارائه شده در این مقاله بسیار فراتر از محاسبهٔ توان‌های تابع اویلر ادامه می‌یابد. تعداد بسیاری از اتحادهای قابل توجه دیگر برای حاصل‌ضرب‌های نامتناهی وجود دارد. امید است که خوانندهٔ این مقاله، انگیزهٔ کافی برای ادامهٔ تحقیق

[۱۴] Jacobi

[۱۵] Fricke

[۱۶] Atkin

[۱۷] Simple Lie Algebra

در این موضوع را به دست آورده باشد.

در پایان به دو اتحاد دیگر از گاوس (علاوه بر آنچه در قسمت ۴ آوردیم)، اشاره می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(۱-x)^۲(۱-x^۲)(۱-x^۳)^۲(۱-x^۴)(۱-x^۵)^۲(۱-x^۶)\cdots \\ = ۱ - ۲x + ۲x^۴ - ۲x^۹ + ۲x^{۱۶} - ۲x^{۲۵} + \cdots ,\end{aligned}$$

$$\frac{(۱-x^۲)(۱-x^۴)(۱-x^۶)(۱-x^۸)}{(۱-x)(۱-x^۳)(۱-x^۵)(۱-x^۷)}\cdots = ۱ + x + x^۳ + x^۶ + x^{۱۰} + x^{۱۵} + x^{۲۱} + \cdots .$$