

بسمه تعالی

آزمون جبرخطی کاربردی

دانشگاه صنعتی اصفهان، تیرماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه

۱. روش محاسبه وارون یک ماتریس را با استفاده از عملیات سطری مقدماتی توضیح دهید و به وسیلهی این روش وارون ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

۲. تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$T(x, y, z, t) = (y - x, z + t, x + y + 2t, 2x - z + t).$$

الف) یک پایه برای هسته (فضای پوچ) و یک پایه برای برد این تبدیل خطی بسازید.

ب) همه مقادیر a, b را پیدا کنید که بردار $(a + b, a, b, a - b)$ در برد این تبدیل خطی قرار گیرد.

ج) ماتریس نمایش این تبدیل خطی را در پایه زیر به دست آورید:

$$B = \{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

۳. سیستم دینامیکی گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x_0 = 1, y_0 = 2,$$

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n, y_{n+1} = x_n + 5y_n.$$

رفتار حدی بردار (x_n, y_n) را برای n های خیلی بزرگ بررسی کنید. (یعنی حد راستای این بردارها و رفتار مجانبی اندازه آنها را به دست آورید.)

۴. الف) تعدادی بردار در فضای n بعدی داده شده است. چگونه تصویر عمود برداری داده شده را بر فضای تولیدشده توسط این بردارها محاسبه می‌کنیم؟

ب) فرض کنید:

$$V = \text{Span}\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (-1, 1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

و $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ نگاشتی باشد که هر بردار را به تصویر عمود آن روی V می‌نگارد. ماتریس نمایش T را بیابید.

۵. الف) ماتریس زیر را با استفاده از یک ماتریس متعامد، قطری کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

ب) قرار دهید:

$$Q(x, y, z) = -3y^2 + 4xy + 4yz - 2xz.$$

مجموعه همه جواب‌های $Q(x, y, z) = 1$ چه نوع رویه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

ج) فرض کنید:

$$X = \{(x, y, z) : Q(x, y, z) = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

مجموعه همه تبدیلات خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را توصیف کنید که $T(X) = X$. (ماتریس نمایش این تبدیلات خطی چه خاصیتی باید داشته باشد؟)

۶. الف) جالبتری مسأله‌ای که در این ترم در رابطه جبرخطی حل کردید را به همراه خلاصه‌ای از راه‌حل آن بنویسید.

ب) به نظر شما جبرخطی تا چه حد در رشته شما دارای کاربرد است؟

ج) آیا کاربرد جالبی غیر از مثال‌هایی که در طول این ترم مطرح شد، از جبرخطی (مخصوصاً در رشته تحصیلی خودتان) سراغ دارید؟ در این صورت، آن را به اندازه کافی شرح دهید.

د) به نظر شما «کاربرد» چیست؟ آیا علم غیر کاربردی هم داریم؟ وضعیت کاربردی بودن دروس را در طول دوره کارشناسی و مخصوصاً دروس ریاضی چگونه ارزیابی می‌کنید؟

موفق باشید.